รายละเอียดการสอน

รหัสวิชา ค 32101 คณิตศาสตร์พื้นฐาน 3 **กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 **เวลา 40 ชั่วโมง จำนวน 1.0 หน่วยกิต**

ผู้สอน นางศศิวิมล คล้ายเครือญาติ

....

ที่	เนื้อหา	จำนวนชั่วโมง	งาน/คะแนน
1.	**เลขยกกำลัง**	**20**	**25**
	✍ **เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม**	4	
	-เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก		<u>งาน</u> ดังนี้
	-เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มลบ		1.คะแนนเอกสาร
	-สัญลักษณ์ทางวิทยาศาสตร์		2.คะแนนสอบรายหน่วยการเรียนรู้
	✍ **รากที่ n ในระบบจำนวนจริงและจำนวนจริงในรูปกรณฑ์**	4	3.คะแนนการเข้าชั้นเรียน
	-รากที่ 2 ของจำนวนจริง		
	-รากที่ 3 ของจำนวนจริง		
	-รากที่ n ของจำนวนจริง		
	✍ **การหาผลบวก ผลต่าง ผลคูณ และผลหารของกรณฑ์**	3	
	-ผลบวกและผลต่างของกรณฑ์		
	-ผลคูณและผลหารของกรณฑ์		
	✍ **การหารากที่ 2 ของพจน์ที่อยู่ในรูป** $X + 2\sqrt{Y}$ หรือ $X - 2\sqrt{Y}$	2	
	✍ **การแก้สมการที่อยู่ในรูปกรณฑ์**	4	
	✍ **เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนจริง**	3	
	-เลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะที่ไม่เป็นลบ		
	-เลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะใดๆ		
	-คุณสมบัติของเลขชี้กำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ		
	-เลขชี้กำลังเป็นจำนวนอตรรกยะ		

<table>
<tr><th>ที่</th><th>เนื้อหา</th><th>จำนวนชั่วโมง</th><th>งาน/คะแนน</th></tr>
<tr><td>2.</td><td>อัตราส่วนตรีโกณมิติ
✍ อัตราส่วนตรีโกณมิติ</td><td>20</td><td><u>งาน</u> ดังนี้
1.คะแนนเอกสาร
2.คะแนนสอบรายหน่วยการเรียนรู้
3.คะแนนการเข้าชั้นเรียน</td></tr>
<tr><td colspan="4">การเก็บคะแนน กลางภาคเรียน : ปลายภาคเรียน : คะแนนระหว่างเรียน</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3.</td><td>กลางภาคเรียน</td><td>20 คะแนน</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>ปลายภาคเรียน</td><td>30 คะแนน</td></tr>
<tr><td>คะแนนระหว่างเรียน</td><td>50 คะแนน</td></tr>
</table>

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1

เลขยกกำลัง

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

เลขยกกำลัง หมายถึง จำนวนที่อยู่ในรูป a^n อ่านว่า **"เอยกกำลังเอ็น"** หรือ **"กำลังที่เอ็นของเอ"** เรียก a ว่า **ฐาน** และเรียก n ว่าเป็น **เลขชี้กำลัง**

<u>เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก</u>

<u>บทนิยาม</u> ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ ตัว}}$$

จากบทนิยาม จะได้ว่า

$$a^1 = a$$
$$a^2 = a \cdot a$$
$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$
$$\vdots$$

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก มีคุณสมบัติที่สำคัญหลายประการ ซึ่งคุณสมบัติเหล่านี้จะเป็นพื้นฐานในการศึกษาเลขยกกำลัง ซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็นอย่างอื่นต่อไป คุณสมบัติเหล่านี้มีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ m , n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

<u>ตัวอย่าง 1</u>

(1) $2^5 \cdot 2^4$ =....................................

(2) $(-3)^2 \cdot (-3)^4$ =....................................

(3) $(\sqrt{2})^3 \cdot (\sqrt{2})^7$ =....................................

(4) $0^5 \cdot 0^5$ =....................................

ทฤษฎีบท 2 ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ m , n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

ตัวอย่าง 2

(1) $(3^2)^4$ =..................................

(2) $[(-5)^3]^3$ =..................................

(3) $(\pi^4)^5$ =..................................

(4) $(0^5)^2$ =..................................

ทฤษฎีบท 3 ถ้า a , b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

ตัวอย่าง 3

(1) $(3 \cdot 4)^2$ =..................................

(2) $[(-2) \cdot 5]^3$ =..................................

(3) $[(-3) \cdot (-5)]^4$ =..................................

(4) $(0 \cdot 8)^5$ =..................................

ทฤษฎีบท 4 ถ้า a , b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ b $\neq$ 0 และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$$

ตัวอย่าง 4

(1) $(\frac{3}{4})^2$ =..................................

(2) $(-\frac{3}{5})^4$ =..................................

(3) $(-\frac{3}{5})^4$ =..................................

(4) $(\frac{0}{8})^5$ =..................................

ทฤษฎีบท 5 ถ้า a เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ และ m , n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } m = n \\ a^{m-n} & \text{เมื่อ } m > n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{เมื่อ } m < n \end{cases}$$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> (1) $\frac{2^5}{2^5}$ =...................................

(2) $\frac{3^4}{3^2}$ =...................................

(3) $\frac{5^3}{5^6}$ =...................................

(4) $\frac{(-4)^2}{(-4)^8}$ =...................................

<u>หมายเหตุ</u> : ในบางครั้ง เพื่อความสะดวก จะเขียน ab แทน a·b

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> (1) $\frac{a^7b^4}{a^2b^3}$

....

....

....

(2) $(x^3y^5)^4$

....

....

....

(3) $\frac{a^3}{b^6} \cdot \frac{a^4}{b^2}$

....

....

....

แบบฝึกหัด

จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $2^6 \cdot 2^4$ =..................................
2) $(\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{1}{2})^8$ =..................................
3) $(-7)^5 \cdot (-7)^6$ =..................................
4) $(\sqrt{5})^8 \cdot (\sqrt{5})^5$ =..................................
5) $(6^2)^5$ =..................................
6) $(-7^4)^7$ =..................................
7) $(4 \cdot 5)^3$ =..................................
8) $(2 \cdot 3)^4$ =..................................
9) $[(-3) \cdot (-7)]^5$ =..................................
10) $(\frac{4}{7})^3$ =..................................
11) $\frac{7^3}{7^8}$ =..................................
12) $\frac{(-2)^2}{(-2)^8}$ =..................................
13) $\frac{11^8}{11^5}$ =..................................
14) $\frac{13^9}{13^8}$ =..................................
15) $\frac{(-9)^7}{(-9)^6}$ =..................................
16) $\frac{23^{10}}{23^{12}}$ =..................................
17) $\frac{11^{12}}{11^{12}}$ =..................................
18) $\frac{3^5 2^7}{3^4 2^8}$ =..................................

\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`\`

<u>เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มลบ</u>

จากที่กล่าวมาข้างต้นได้กล่าวถึงเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวกไปแล้ว เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนศูนย์ หรือ จำนวนเต็มลบ จะมีความหมายดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2 $a^0 = 1$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$

บทนิยาม 3 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง , $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

หมายเหตุ จากบทนิยาม 2 และ 3 พบว่า

(1) a^0 จะมีความหมายและหาค่าได้ เมื่อ $a \neq 0$

(2) a^{-n} เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะมีความหมายและหาค่าได้ เมื่อ $a \neq 0$ เมื่อรวมเข้ากับบทนิยาม 1 จะได้ว่า

(3) ถ้า a เป็นจำนวนจริง , $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ แล้ว เราจะหาค่าของ a^n ได้เสมอ

<u>ตัวอย่างที่ 7</u>

(1) 1^0 =……………………………..

(2) $(\frac{1}{2})^0$ =……………………………..

(3) $(\sqrt{2})^0$ =……………………………..

(4) $(-3)^0$ =……………………………..

(5) $(-\pi)^0$ =……………………………..

<u>ตัวอย่างที่ 8</u>

(1) 3^{-2} =……………………………..

(2) 2^{-4} =……………………………..

(3) $(\sqrt{2})^{-6}$ =……………………………..

(4) $(\frac{1}{5})^{-2}$ =……………………………..

แบบฝึกหัด

จงหาคำตอบของโจทย์ข้อต่อไปนี้ในรูปอย่างง่าย ซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

(1) $36^2 \cdot 6^{-4}$

....

....

....

(2) $2^{-2}(2^2 + 2)$

....

....

....

(3) $3^3(6 + 3.8^0)$

....

....

....

(4) $(\frac{6^2}{36^3})^{-3}$

....

....

....

(5) $(\frac{3^3}{9})^{-1}$

....

....

....

(6) $(3^{-1} + 2^{-1})^{-2}$

(7) $\frac{4^{-1}+3^{-2}}{2}$

(8) $(5^{-1} + 25^{0})^{-1}$

(9) $(4^{-1} - 4^{-2})^{-2}$

(10) $(8^{-2} - 2^{0})^{-3}$

(11) $(\frac{13^{2}}{13^{5}})$

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> ถ้า a , b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 0 แล้ว จงเขียน $[\frac{2^{-2}a^3b^{-2}}{2a^{-2}b^3}]^{-2}$ ในรูปอย่างง่าย ซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

....

....

....

....

....

....

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 0 แล้ว จงหาคำตอบของ

$[\frac{x^{-5}y^4}{x^2y^{-2}}]^2 \cdot [\frac{x^4y^{-5}}{x^3y^{-7}}]^{-3}$ ในรูปอย่างง่าย ซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

....

....

....

....

....

....

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> ถ้า a , b และ c เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 0 แล้ว จงหาค่าของ

$[\frac{a^{-1}b^{-2}}{c^3}]^2 \cdot [\frac{a^{-4}b^2}{c^{-3}}]^{-2}$ ในรูปอย่างง่าย ซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

....

....

....

....

....

....

<u>แบบฝึกหัด</u>

ในโจทย์ข้อต่อไปนี้ กำหนดให้ x , y และ z เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 0 จงหาคำตอบในรูปอย่างง่าย ซึ่งมีเลขชี้กำลังไม่เป็นจำนวนเต็มลบ

(1) $(x^4y^3)x^{-1}$

....

....

....

(2) $(x^{-2}y^4)(xy)^3$

....

....

....

(3) $\frac{x^4}{x^5y^{-1}}$

....

....

....

(4) $(x^2y^2)^{-3}$

....

....

....

(5) $\frac{24x^4y^3}{8y^3x}$

....

....

....

(6) $\frac{27x^4y^3}{18x^5y^2}$

....

....

....

(7) $\frac{4x^4y^6}{6z^5} \cdot \frac{9x^3z^6}{12y^7}$

....

....

....

(8) $\frac{7x^2y^2}{10yz^4} \cdot \frac{5z^2}{14x^2z^3}$

....

....

....

(9) $(\frac{4x^{-2}y}{3xy^{-3}})^3$

....

....

....

(10) $(\frac{2xy^{-3}}{3x^{-2}y^2})^2$

....

....

....

(11) $(\frac{3x^{-2}y^2}{17x^2y^3})^0$

....

....

(12) $\left(\frac{-2x^4y}{x^{-3}y^2}\right)^{-3}$

……

……

……

(13) $\left(\frac{2x^{-3}y^2}{3x^{-3}y^2}\right)^{-3}$

……

……

……

(14) $\frac{(4x^{-2}y^{-3})^{-2}(x^{-4}y^{-3})^2}{-3x^{-4}y^{-3}}$

……

……

……

(15) $\left(\frac{x^4y^{-2}}{x^2y^2}\right)^2$

……

……

……

(16) $\left(\frac{3x^{-2}y}{12xy^2}\right)^{-1}$

……

……

……

(17) $\frac{6x^{-3}y^2z^{-2}}{18xy^{-2}z^3}$

……

……

(18) $(\frac{x^5y}{x^2y^4})^{-2}$

………

………

………

(19) $(\frac{15x^2y^3z^{-5}}{125x^5y^{-3}z^{-8}})^2$

………

………

………

(20) $(\frac{32x^{-3}y^2z}{8x^{-5}y^{-2}z^2})^{-2}$

………

………

………

NOTE

<u>ตัวอย่างที่ 12</u> ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว จงหาค่าของ $\frac{3\cdot 2^{n}-4\cdot 2^{n+1}}{2^{n}-2^{n+1}}$

....

....

....

....

<u>ตัวอย่างที่ 13</u> ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว จงหาค่าของ $\frac{9\cdot 3^{n+1}+2\cdot 3^{n+2}-4\cdot 3^{n+3}}{5\cdot 3^{n}+4\cdot 3^{n+1}-3\cdot 3^{n+2}}$

....

....

....

....

<u>ตัวอย่างที่ 14</u> ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว จงหาค่าของ $\frac{3\cdot 2^{n}-4\cdot 2^{n-1}}{2^{n}-2^{n-1}}$

....

....

....

....

<u>ตัวอย่างที่ 15</u> ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว จงหาค่าของ $\frac{(2^{n+1})^{n}}{(2^{n})^{n-1}}+(\frac{4^{n+1}}{2^{2n+1}})^{2n}$

....

....

....

....

<u>ตัวอย่างที่ 16</u> ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว จงหาค่าของ $\frac{2^{n+3}}{15^{-n-1}}\cdot\frac{6^{-n+2}}{5^{n+1}}$

....

....

....

....

<u>แบบฝึกหัด</u>

กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงหาคำตอบของข้อต่อไปนี้ในรูปอย่างง่าย

(1) $\dfrac{9^{n+2}-36\cdot 9^{n-1}}{9^{n}}$

(2) $\dfrac{5\cdot 3^{n+1}+5\cdot 3^{n+2}}{3^{n+2}-7\cdot 3^{n-1}}$

(3) $\dfrac{6\cdot 3^{n+1}-3^{n+4}}{3^{n+2}\cdot 7}$

(4) $\dfrac{11\cdot 4^{n-2}+4^{n+1}}{4^{n+2}-4^{n+4}}$

(5) $\frac{4^{2n}\cdot(4^{2n-1})^{2n}}{4^{n+3}\cdot4^{3n-3}}\cdot\frac{1}{16^{2n^2-2n}}$

……

……

……

……

NOTE

กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงบวก และ n เป็นจำนวนเต็ม จงแยกตัวประกอบของข้อต่อไปนี้

(1) $a^{2n} - a^n - 6$

....

....

....

(2) $a^{-2n} - 5a^{-n} + 6$

....

....

....

(3) $a^{4n} + 2a^{2n} - 15$

....

....

....

(4) $a^{-4n} - 1$

....

....

....

(5) $a^{6n} + 2a^{3n} + 1$

....

....

....

(6) $a^{-6n} + 3a^{-3n} - 18$

....

....

....

สัญลักษณ์ทางวิทยาศาสตร์ (Scientific Notation)

จำนวนจริงบวกที่ปรากฏในทางวิทยาศาสตร์ มักจะมีขนาดใหญ่มาก หรือขนาดเล็กมาก เช่น อัตราเร็วของแสงประมาณ 29,980,000,000 เซนติเมตรต่อนาที หรือมวลอะตอมไฮโดรเจนเท่ากับ 0.000000000000000000000001673 กรัม เป็นต้น

จำนวนที่มีตัวเลข 0 ปรากฏอยู่หลายๆ ตัว จะทำให้มีปัญหาต่อการอ่านจำนวนนั้น และยากแก่การจดจำ ดังนั้นในทางวิทยาศาสตร์จึงมักกำหนดจำนวนเหล่านี้ในรูปของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม เราเรียกจำนวนที่เขียนในรูปดังกล่าวว่า **สัญลักษณ์ทางวิทยาศาสตร์**

<u>บทนิยาม</u> จำนวนจริงบวกที่เขียนในรูป **สัญลักษณ์ทางวิทยาศาสตร์** หมายถึง จำนวนที่เขียนในรูปผลคูณของจำนวนจริง a โดยที่ $1 \le a < 10$ กับจำนวนที่อยู่ในรูป 10^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

<u>ตัวอย่างที่ 17</u> จงเขียนจำนวน 29,980,000,000 ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางวิทยาศาสตร์

....

....

....

<u>ตัวอย่างที่ 18</u> จงเขียนจำนวน 0.000000000000000000000001673 ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางวิทยาศาสตร์

....

....

....

✍ จากตัวอย่างที่ 17 และ ตัวอย่างที่ 18 สามารถสรุปวิธีการเขียนจำนวนที่กำหนดให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางวิทยาศาสตร์ได้อย่างง่ายๆ ดังนี้

กำหนดจำนวนจริง A

ขั้นที่ 1 จากจำนวนจริง A เขียนจำนวนจริงบวก a ซึ่ง $1 \le a < 10$ (ทศนิยม 1 ตำแหน่ง)

ขั้นที่ 2 เลื่อนจุดทศนิยมไปจนกระทั่งได้จำนวนที่เท่ากับ A

✍ ถ้าเลื่อนไปทางขวามือ n ตำแหน่ง จะได้ว่า $A = a \times 10^n$

✍ ถ้าเลื่อนไปทางซ้ายมือ n ตำแหน่ง จะได้ว่า $A = a \times 10^{-n}$

แบบฝึกหัด

จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางวิทยาศาสตร์

(1) 1,002,000,000

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

(2) 0.000000000000000613

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

(3) 0.00000000000004123

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

(4) 3,900

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

(5) 0.0078

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

(6) 0.00000068

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

(7) 17,600,000

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

(8) 0.00000096

………

………

(9) 323×10^{5}

………

………

(10) 1689×10^{9}

………

………

(11) $6,000 \times 10^{-7}$

………

………

(12) 0.0527×10^{5}

………

………

NOTE

รากที่ n ในระบบจำนวนจริงและจำนวนจริงในรูปกรณฑ์

รากที่ 2 ของจำนวนจริง

<u>บทนิยาม</u> ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง จะเรียก b ว่าเป็นรากที่ 2 ของ a ก็ต่อเมื่อ $b^2 = a$

หมายเหตุ (1) เนื่องจาก $b^2 \geq 0$ เสมอ ดังนั้น จำนวนจริง a จะมีรากที่ 2 ที่เป็นจำนวนจริง ก็ต่อเมื่อ $a \geq 0$ เท่านั้น

(2) เนื่องจาก $b^2 = (-b)^2$ ดังนั้น ถ้า b เป็นรากที่ 2 ของ a แล้ว -b จะเป็นรากที่ 2 ของ a ด้วย

(3)ถ้า a = 0 แล้ว รากที่ 2 ของ a จะมีเพียงจำนวนเพียง คือ 0

ถ้า $a > 0$ แล้ว รากที่ 2 ของ a จะมีสองจำนวน จำนวนหนึ่งเป็นจำนวนจริงบวก และอีกจำนวนหนึ่งเป็นจำนวนจริงลบ (ซึ่งเป็นอินเวอร์สสำหรับการบวกของจำนวนแรก)

(4) ถ้า $a < 0$ แล้ว จะไม่มีรากที่ 2 ของ a ที่เป็นจำนวนจริง

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> (1) เนื่องจาก $2^2 = 4$ และ $(-2)^2 = 4$

ดังนั้น รากที่ 2 ของ 4 คือ 2 และ -2

(2) เนื่องจาก $(\frac{1}{5})^2 = \frac{1}{25}$ และ $(-\frac{1}{5})^2 = \frac{1}{25}$

ดังนั้น รากที่ 2 ของ $\frac{1}{25}$ คือ $\frac{1}{5}$ และ $-\frac{1}{5}$

(3) เนื่องจาก $0^2 = 0$

ดังนั้น รากที่ 2 ของ 0 คือ 0

ตามที่กล่าวมาแล้วว่า ถ้า $a \geq 0$ แล้ว จะสามารถหารากที่ 2 ของ a ได้เสมอซึ่งจะมีเพียงจำนวนเดียวหรือสอบจำนวน ขึ้นอยู่กับว่า $a = 0$ หรือ $a > 0$

อย่างไรก็ตาม ไม่ว่า $a = 0$ หรือ $a > 0$ จะมีรากที่ 2 ของ a **ที่ไม่เป็นจำนวนจริงลบ**เสมอ รากที่ 2 ไม่เป็นลบของ a นี้ จะมีชื่อเรียกและสัญลักษณ์ดังบทนิยาม ต่อไปนี้

หมายเหตุ จากบทนิยาม จะพบว่า

(1) ถ้า $a \geq 0$ แล้ว $\sqrt{a}$ จะหาค่าได้เสมอและมีเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

(2) ถ้า $a = 0$ แล้ว $\sqrt{a} = \sqrt{0} = 0$

(3) ถ้า $a > 0$ แล้ว $\sqrt{a}$ จะเป็นจำนวนจริงบวก b ซึ่ง $b^2 = a$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>

(1) ค่าหลักของรากที่ 2 ของ 4 คือ $\sqrt{4} = 2$

(2) ค่าหลักของรากที่ 2 ของ 9 คือ………………………..

(3) ค่าหลักของรากที่ 2 ของ 16 คือ………………………..

(4) ค่าหลักของรากที่ 2 ของ 625 คือ………………………..

(5) ค่าหลักของรากที่ 2 ของ 0 คือ………………………..

(6) ค่าหลักของรากที่ 2 ของ 7 คือ………………………..

(7) รากที่ 2 ของ 3 คือ………………………..

(8) รากที่ 2 ของ 49 คือ………………………..

<u>ทฤษฎีบท 1</u> ถ้า $a \geq 0$ และ $b \geq 0$ แล้ว $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

<u>ทฤษฎีบท 2</u> ถ้า $a \geq 0$ และ $b > 0$ แล้ว $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u>

(1) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$

(2) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}$ =………………………………………………………..

(3) $\sqrt{0} \cdot \sqrt{7}$ =………………………………………………………..

(4) $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{2}}$ =…………………………………………………………..

(5) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$ =…………………………………………………………..

แบบฝึกหัด

จงหารากที่ 2 และค่าหลักของรากที่ 2 ของจำนวนจริง a ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) a = 121

………

………

(2) a = 169

………

………

(3) a = 576

………

………

(4) a = 72

………

………

(5) a = 243

………

………

(6) a = 1,728

……

………

รากที่ 3 ของจำนวนจริง

บทนิยาม ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง จะเรียก b ว่าเป็น รากที่ 3 ของ a ก็ต่อเมื่อ $b^3 = a$

หมายเหตุ (1) ถ้า $a = 0$ แล้ว b = รากที่ 3 ของ $a = 0$

(2) ถ้า $a > 0$ แล้ว b = รากที่ 3 ของ $a > 0$

(3) ถ้า $a < 0$ แล้ว b = รากที่ 3 ของ $a < 0$

(4) จาก (1) กับ (2) จะได้ว่า ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว เราสามารถหารากที่ 3 ของ a ได้เสมอ และรากที่ 3 ของ a จะมีได้เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

- ต่อไป จะเขียนสัญลักษณ์ แทน รากที่ 3 ของ a ด้วย $\sqrt[3]{a}$ นั่นคือ

ถ้า $a = 0$ แล้ว $\sqrt[3]{a} = 0$

ถ้า $a > 0$ แล้ว $\sqrt[3]{a} > 0$

ถ้า $a < 0$ แล้ว $\sqrt[3]{a} < 0$

ตัวอย่างที่ 4 (1) $\sqrt[3]{8} = 2$ ทั้งนี้เพราะ $2^3 = 8$

(2) $\sqrt[3]{27}$ =……………………………………………………………………..

(3) $\sqrt[3]{125}$ =……………………………………………………………………..

(4) $\sqrt[3]{-64}$ =……………………………………………………………………..

(5) $\sqrt[3]{-216}$ =……………………………………………………………………..

NOTE

<u>บทนิยาม</u>	ให้ a เป็นจำนวนจริงใดๆ ค่าหลักของรากที่ 3 ของ a หมายถึง รากที่ 3 ของ a (ซึ่งมีจำนวนเดียว)

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> (1) ค่าหลักของรากที่ 3 ของ 1,000 = $\sqrt[3]{1,000} = 10$

(2) ค่าหลักของรากที่ 3 ของ -343 =..

(3) ค่าหลักของรากที่ 3 ของ 1 =..

(4) ค่าหลักของรากที่ 3 ของ -5 =..

(5) ค่าหลักของรากที่ 3 ของ 0 =..

จากบทนิยามข้างต้น จะพบความแตกต่างของค่าหลักของรากที่ 2 กับค่าหลักของรากที่ 3 ของ จำนวนจริง a กล่าว คือ

(1) ค่าหลักของรากที่ 2 (2 เป็นจำนวนเต็มบวกคู่) ของ a หมายถึง รากที่ 2 ของ a ที่ ไม่เป็นลบ

(2) ค่าหลักของรากที่ 3 (3 เป็นจำนวนเต็มบวกคี่) ของ a หมายถึง รากที่ 3 ของ a (ซึ่งอาจจะเป็นจำนวนจริงบวกหรือลบหรือศูนย์ก็ได้)

แต่ถึงแม้จะมีความแตกต่างกันในระหว่างค่าหลักของรากที่ 2 กับค่าหลักของรากที่ 3 ก็ตาม ค่าหลักของรากทั้งสองจะมีคุณสมบัติเหมือนกันอยู่ 2 ประการ คือ

จำนวนจริง b จะเป็นค่าหลักของรากที่ 2 (หรือ 3) ของ a ก็ต่อเมื่อ

(1) b เป็นรากที่ 2 (หรือ 3) ของ a

(2) ab ≥ 0

<u>แบบฝึกหัด</u>

จงหารากที่ 3 และค่าหลักของรากที่ 3 ของจำนวนจริง a ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) a = 343

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

(2) a = -216

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

(3) a = 512

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

(4) a = 1,029

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

(5) a = -1,080

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

(6) a = 1,024

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

(7) a = 27

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

รากที่ n ของจำนวนจริง

ที่กล่าวมาข้างต้น เป็นความหมายของรากและค่าหลักของรากที่ 2 และที่ 3 ของจำนวนจริง ในกรณีทั่วๆไป ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 เราสามารถให้ความหมายของรากที่ n และค่าหลักของรากที่ n ของจำนวนจริงได้ ดังนี้

<u>บทนิยาม</u> ให้ a , b เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1
b เป็นรากที่ n ของ a ก็ต่อเมื่อ $b^n = a$

เช่นเดียวกับรากที่ 2 และรากที่ 3 เราจะพิจารณาเปรียบเทียบ รากที่ n ของ a ได้โดยแยกพิจารณา ตามจำนวนเต็มบวก n ค่า ว่าเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ ดังนี้

n เป็นจำนวนคู่	**n เป็นจำนวนคี่**
(1) รากที่ n ของ a จะหาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $a \geq 0$ เท่านั้น (2) ถ้า a = 0 แล้ว รากที่ n ของ a = 0 (3) ถ้า $a > 0$ แล้ว รากที่ n ของ a จะมี 2 จำนวน จำนวนหนึ่งเป็นบวกและอีกจำนวนหนึ่งเป็นลบ (4) ถ้า a < 0 แล้ว ไม่สามารถหารากที่ n ของ a ได้ในระบบจำนวนจริง	(1) รากที่ n ของ a จะหาค่าได้เสมอ สำหรับจำนวนจริง a ทุกจำนวน (2) ถ้า a = 0 แล้ว รากที่ n ของ a = 0 (3) ถ้า $a > 0$ แล้ว รากที่ n ของ a จะมีเพียงจำนวนเดียวและเป็นจำนวนจริงบวก (4) ถ้า a < 0 แล้ว รากที่ n ของ a จะมีเพียงจำนวนเดียว และเป็นจำนวนจริงลบ

ตัวอย่างที่ 6 (1) รากที่ 4 ของ 625 คือ 5 และ -5
ทั้งนี้เพราะ $5^4 = 625$ และ $(-5)^4 = 625$
(2)รากที่ 6 ของ 729 คือ..
ทั้งนี้เพราะ..
(3)รากที่ 5 ของ 1,024 คือ..
ทั้งนี้เพราะ..
(4)รากที่ 7 ของ -128 คือ..
ทั้งนี้เพราะ..

- ต่อไปนี้เป็นบทนิยามของค่าหลักของ รากที่ n ของจำนวนจริง

<u>บทนิยาม</u> ให้ a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1

(1) ถ้า $a \geq 0$ และ n เป็นจำนวนคู่ แล้ว **ค่าหลักของรากที่ n ของ a** หมายถึง รากที่ n ของ a ที่ไม่เป็นลบ เขียนแทนด้วย $\sqrt[n]{a}$

(2) ถ้า $a \varepsilon R$ และ n เป็นจำนวนคี่ แล้ว **ค่าหลักของรากที่ n ของ a** หมายถึง รากที่ n ของ a เขียนแทยด้วย $\sqrt[n]{a}$

- เช่นเดียวกับค่าหลักของรากที่สองและที่สาม ที่เราได้กล่าวไปแล้ว เราสามารถกล่าวได้ว่า

ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n แล้ว จำนวนจริง b จะเป็นค่าหลักของรากที่ n ของ a ก็ต่อเมื่อ

(1) b เป็นรากที่ n ของ a

(2) $ab \geq 0$

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> (1) $\sqrt[4]{625}$ = ค่าหลักของรากที่ 4 ของ 625 = 5

(2) $\sqrt[6]{729}$ =……………………………………………………………..

(3) $\sqrt[10]{100}$ =……………………………………………………………..

(4) $\sqrt[5]{1,024}$ =……………………………………………………………..

(5) $\sqrt[7]{-128}$ =……………………………………………………………..

<u>หมายเหตุ</u> (1) เรียกเครื่องหมาย $\sqrt[n]{\square}$ ว่า **เครื่องหมายกรณฑ์** และเรียก n ว่าเป็น**อันดับที่** หรือ **ดัชนี** ของ กรณฑ์ เช่น $\sqrt[3]{\square}$ เป็นเครื่องหมาย กรณฑ์ ที่มี ดัชนี เท่ากับ 3

(2)ในกรณีที่ n = 2 จะเขียน $\sqrt{\square}$ แทน $\sqrt[2]{\square}$

(3) ถ้า a เป็นจำนวนจริง จะเรียกจำนวนที่เขียนในรูป $\sqrt[n]{a}$ ว่า **กรณฑ์** และ อ่านว่า **กรณฑ์ที่ n ของ a หรือ ค่าหลักของรากที่ n ของ a**

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> (1) $\sqrt[3]{9}$ อ่านว่า กรณฑ์ที่ 3 ของ 9 หรือ ค่าหลักของรากที่ 3 ของ 9

(2) $\sqrt[4]{15}$ อ่านว่า..

(3) $\sqrt[5]{-50}$ อ่านว่า..

NOTE

สมบัติของรากที่ n ของจำนวนจริง

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นการรวมคุณสมบัติบางประการเกี่ยวกับรากที่ n ของจำนวนจริง

<u>ทฤษฎีบท</u>	ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n แล้ว $(\sqrt[n]{a})^n = a$

<u>ทฤษฎีบท</u>	ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n แล้ว $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

<u>ตัวอย่างที่ 9</u>

(1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ =…………………………………………..

(2) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$ =…………………………………………..

(3) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-16}$ =…………………………………………..

(4) $\sqrt[3]{8 \times (-27)}$ =…………………………………………..

(5) $\sqrt[4]{16 \times 81}$ =…………………………………………..

<u>ทฤษฎีบท</u>	ถ้า a , b เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n และ b $\neq$ 0 แล้ว $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

<u>ตัวอย่างที่ 10</u>

(1) $\frac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{-9}}$ =…………………………………………..

(2) $\frac{\sqrt[4]{324}}{\sqrt[4]{4}}$ =…………………………………………..

(3) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$ =…………………………………………..

(4) $\sqrt[3]{-\frac{125}{8}}$ =…………………………………………..

(5) $\sqrt{\frac{(81)\cdot(16)}{25}}$ =…………………………………………..

<u>ทฤษฎีบท</u> ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $n \geq 2$ แล้ว

(1) $\sqrt[n]{a^n} = a$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

(2) $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> (1) $\sqrt{3^2} = |3| = 3$

(2) $\sqrt{(-3)^2}$ =...

(3) $\sqrt[3]{5^3}$ =...

(4) $\sqrt[3]{(-5)^3}$ =...

(5) $\sqrt[4]{6^4}$ =...

(6) $\sqrt[6]{(-1)^6}$ =...